MASARYKOVA UNIVERZITA V BRNĚ
PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA

KATEDRA MATEMATIKY

DYSKALKULIE Z HLEDISKA STUDENTŮ STŘEDNÍCH ŠKOL

Diplomová práce

Brno 2004

Vedoucí diplomové práce:
RNDr. Růžena Blažková, CSc.

Vypracovala:
Hana Horáčková

Prohlášení:

Prohlašuji, že jsem diplomovou práci zpracovala samostatně a použila jen prameny uvedené v seznamu literatury.

....

podpis

Poděkování

Je mi milou povinností poděkovat vedoucí diplomové práce paní RNDr. Růženě Blažkové, CSc. za nevšední ochotu, s kterou se ujala vedení mé práce a mimořádnou trpělivost a zvláště za neocenitelné rady, které mi poskytla při jejím zpracování.

S upřímnými díky

Brno 2.5.2004 Hana Horáčková, diplomantka

OBSAH

1. ÚVOD

Specifické vývojové poruchy učení jsou studovány jak psychology a speciálními pedagogy, tak učiteli příslušných předmětů. Problematika dyskalkulie je sledována, stejně jako ostatní poruchy učení, zejména na základní škole. Na středních školách jí zatím není věnována přílišná pozornost a v publikovaných materiálech není téměř vůbec zpracována. Protože je mnoho studentů, kteří některou ze specifických vývojových poruch učení jako žáci základní školy trpěli, zajímalo mne, jak se tito studenti uplatňují na středních školách a proto jsem si tuto problematiku zvolila jako téma diplomové práce.

Diplomovou práci jsem rozdělila do tří stěžejních částí. V první části jsem na základě prostudované literatury uvedla obecné informace o specifických vývojových poruchách učení a podrobně jsem se zaměřila na dyskalkulii. V druhé části se věnuji praktické problematice, uvádím zde převážně metodou rozhovoru zkušenosti studentů, učitelů i pracovníků pedagogicko – psychologických poraden. Ve třetí části podrobně rozpracovávám jedno z témat středoškolské matematiky. Tímto tématem je algebra. Vybrala jsem ji proto, že tvoří základ dalšího středoškolského učiva. Dokonce i studenti vysokých škol dělají v této oblasti závažné chyby.

Na základních i středních školách jsou žáci, u kterých se projevují specifické vývojové poruchy učení. Je to skutečně problém vývojový, nikoliv to, že by žák ve všech předmětech nedosahoval požadovaných výsledků. Diplomovou práci mohou využít učitelé matematiky na středních školách, pomůže jim zorientovat se v dané problematice a také při práci se studenty s dyskalkulií.

2. SPECIFICKÉ PORUCHY UČENÍ

Problematika specifických vývojových poruch učení je velice rozsáhlá. Nejvíce je studována dyslexie a dysgrafie, v poslední době se pozornost věnuje i dyskalkulii. Zpočátku se zaměřím celkově na specifické poruchy učení a poté konkrétně na poruchu matematických schopností dyskalkulii. Jsou zde zmíněny i další příčiny, které mohou ovlivnit úspěšnost studentů v matematice.

2.1. DEFINICE SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ

V roce 1976 vydal Úřad pro výchovu v USA definici specifických vývojových poruch učení v tomto znění: „Specifické poruchy učení jsou poruchami v jednom nebo více psychických procesech, které se účastní v porozumění řeči nebo v užívání řeči, a to mluvené i psané. Tyto poruchy se mohou projevovat v nedokonalé schopnosti naslouchat, myslet, číst, psát nebo počítat. Zahrnují stavy, jako je např. narušené vnímání, mozkové poškození, lehká mozková dysfunkce, dyslexie, vývojová dysfázie atd.“ (11, s. 24)

Další definice specifických poruch učení z roku 1980 pochází od skupiny expertů Národního ústavu zdraví ve Washingtonu, USA spolu s experty Ortonovy společnosti a dalších institucí a zní takto: „Poruchy učení jsou souhrnným označením různorodé skupiny poruch, které se projevují zřetelnými obtížemi při nabývání a užívání takových dovedností, jako je mluvení, porozumění mluvené řeči, čtení, psaní, matematické usuzování nebo počítání. Tyto poruchy jsou vlastní postiženému jedinci a předpokládají dysfunkci centrálního nervového systému, i když se porucha učení může vyskytovat souběžně s jinými formami postižení (jako např. smyslové vady, mentální retardace, sociální a emocionální poruchy) nebo souběžně s jinými vlivy prostředí (např. kulturní zvláštnosti, nedostatečná nebo nevhodná výuka, psychogenní činitelé), není přímým následkem takových postižení nebo nepříznivých vlivů.“ (11, s. 24)

Obě výše uvedené definice specifických vývojových poruch učení se samozřejmě týkají nejenom školního věku, ale už i časného dětství a promítají se i do života v dospělosti.

Zpravidla jsou poruchy učení uváděny ve spojitosti s dysfunkcí centrálního nervového systému. Specifické vývojové poruchy učení jsou totiž podmíněny poruchami v procesech, kterými se získávají a zpracovávají informace.

Jako nejčastěji se vyskytující vývojové poruchy učení bývají popisovány:

Dyslexie – porucha čtení, která postihuje zejména správnost čtení, rychlost čtení a porozumění čtenému textu.

Dysgrafie – porucha psaní, která postihuje úpravu písemného projevu, osvojování jednotlivých znaků a spojení písmeno – hláska.

Dysortografie – porucha pravopisu, která nezahrnuje gramatické chyby, ale specifické dysortografické chyby, např.: rozlišování dlouhých a krátkých samohlásek, sykavek, tvrdých a měkkých slabik apod.

Dyskalkulie – porucha matematických schopností, postihuje matematické představy, operace s čísly, prostorové představy apod.

Dysmuzie – porucha v oblasti hudebních dovedností.

Dyspinxie – porucha v oblasti kresebných dovedností.

Dyspraxie – porucha obratnosti.

2.2. KLASIFIKACE PORUCH A NARUŠENÍ MATEMATICKÝCH SCHOPNOSTÍ

Specifickými poruchami učení se zabývají psychologové, speciální pedagogové i někteří matematikové. Speciální pedagog J. Novák uvádí tuto klasifikaci poruch a narušení matematických schopností:

1) **Kalkulastenie –** mírné narušení matematických schopností, které je podmíněno nedostatečnou nebo nesprávnou stimulací ze strany rodiny nebo školy. Dítě má normální schopnosti pro matematiku, ale vlivem působení vnějších faktorů nejsou rozvinuty v potřebné matematické vědomosti a dovednosti. Kalkulastenie se tedy nepovažuje za vývojovou poruchu učení.

   Lze rozlišit následující typy:

   a) **Sekundární kalkulastenie –** selhávání v matematice, které vzniká jako odezva dítěte na nevhodné reakce, např. ze strany spolužáků, rodičů, ale i pedagogů ve výuce matematiky nebo v domácí přípravě, přičemž specifické a všeobecné předpoklady pro matematiku jsou zachovány.

   b) **Sekundární neurotická kalkulastenie –** matematické schopnosti jsou narušeny vlivem působení emocionálních, neurotizujících, či sociálních činitelů na dítě, např. nepodnětné nebo nesouladné rodinné zázemí, finanční, bytové a jiné problémy rodičů, neúměrná ambicióznost rodičů nebo vyučujících.

c) **Pseudokalkulastenie –** nejsou narušeny všeobecné ani specifické schopnosti pro matematiku, ale s ohledem na odlišný typ osobnosti téměř či výrazně neodpovídá způsob učení (výuky) stylu učení dítěte.

2) **Hypokalkulie –** mírné narušení schopností pro matematiku, které se jeví jako podprůměrné, přitom jsou všeobecné rozumové předpoklady průměrné nebo mohou být i nadprůměrné a rovněž rodinné zázemí i příprava na školní výuku jsou zcela přiměřené.

3) **Oligokalkulie –** kromě nízké úrovně rozumových schopností jsou zde i výrazně snížené předpoklady pro matematiku. Jedinec s touto poruchou je většinou vzděláván ve zvláštní škole. Při oligokalkulii je hodnota matematického kvocientu (MQ), ale i IQ snížena alespoň o 25%, je tedy nižší než 75.

4) **Dyskalkulie –** (rozšířená definice) je vývojová porucha učení v matematice s výrazně narušenými dílčími předpoklady pro matematiku při alespoň průměrně rozvinutých rozumových schopnostech dítěte. Rovněž rodinné zázemí i příprava na školní výuku jsou přiměřené.

5) **Akalkulie –** představuje úplnou neschopnost počítat a zvládat i nejjednodušší početní operace a chápat matematické pojmy a vztahy. O tuto poruchu se jedná zpravidla tehdy, pokud jde o ztrátu již rozvinutých početních dovedností, často v důsledku mozkového poškození.

6**) Parakalkulie –** je výraznou kvalitativní odchylkou od normálních matematických schopností, např. dítě zaměňuje číselné pojmy a znaky s písmeny apod. Tato porucha je však často příznakem duševního onemocnění a vyskytuje se poměrně zřídka.

2.3. TYPY DYSKALKULIE

Příznaky dyskalkulie jsou velice pestré. Podle nich dělíme dyskalkulii do dalších typů. Jednotlivé, kvalitativně odlišné typy mohou být co do intenzity a závažnosti symptomů odstupňované. L. Košč rozlišuje následující typy dyskalkulie:

Praktognostická dyskalkulie je porucha manipulace s konkrétními předměty nebo jejich symboly (číslice, operační znaménka, apod.). Dítě není schopno vytvořit skupinu předmětů o daném počtu prvků, tedy není schopno dospět k pojmu přirozeného čísla. Z toho vyplývají problémy s porovnáváním čísel a uspořádáním množiny přirozených čísel. V geometrii neumí seřadit předměty podle velikosti (např. podle délky), rozlišit jednotlivé geometrické tvary, pochopit rozmístění předmětů v prostoru, má potíže se směrovou a stranovou orientací atd.

Verbální dyskalkulie představuje poruchu slovního označování množství a počtu předmětů, názvů číslic, číslovek, operačních znaků a matematických úkonů vůbec. Dítě nezvládá vyjmenovat číselnou řadu vzestupně a sestupně, po násobcích, nedokáže jmenovat řadu lichých nebo sudých čísel. Při vyjmenovávání řady se vrací, vynechávají, zaměňují pořadí, apod. Dítě nedokáže správně chápat a představit si vyslovené číslo nebo slovně označit počet ukazovaných předmětů. Patří sem i neschopnost chápat zdánlivě jasné termíny matematického slovníku, např. nerozlišuje nebo mimořádně obtížně mezi „o 4 více“ a „4krát více“.

Lexická dyskalkulie je porucha čtení matematických symbolů (číslic, čísel, ale i operačních znaků). Při nejtěžší formě této poruchy není jedinec schopen číst izolované číslice nebo jednoduché operační znaky. Při lehčí formě čte nesprávně vícemístné číslo s nulami uprostřed, zlomky, odmocniny, desetinná čísla, apod. Příznačné jsou inverze tvarově podobných čísel 3-8, 6-9, římských číslic IV-VI, záměny čísel 21-12, čtení pouze číslic 2, 3, 8, místo čísla 238. Časté jsou záměny číslic v čísle při čtení nebo psaní, přetrvávají nejasnosti s pochopením významu poziční hodnoty číslic v čísle, tedy jednotek, desítek atd. Příčinou bývá zraková porucha nebo porucha orientace v prostoru, zvláště pravolevé orientace. Lexická dyskalkulie se často označuje i jako numerická dyslexie.

Grafická dyskalkulie je porucha zápisu matematických symbolů (psaní číslic, operačních znaků, kreslení geometrických tvarů atd.). Jedinec má obtíže v psaní čísel v přiměřené a stejné velikosti, není schopen zápisu čísel podle diktátu, zápisu číslic v čísle ve správném pořadí, píše diktovanou číslovku jako slovo, není schopen zapsat čísla správně pod sebe podle jednotlivých řádů, je narušen zápis vícemístných čísel (např. 1248 napíše jako 1000, 200, 80, 4), inverzní zápis čísel, např. 6 a 9, nebo inverze typu 39 a 93 apod., vynechávky zpravidla nul ve vícemístných číslech, nepřehledný zápis početních operací, zejména do sloupců, např. u písemného násobení. V geometrii má dítě problémy s rýsováním i jednoduchých obrazců. Porušena bývá pravolevá a prostorová orientace. Grafickou dyskalkulii lze nazvat i numerickou dysgrafií.

Operační dyskalkulie je nejrozšířenější porucha projevující se narušenou schopností provádět matematické operace. Často se objevují záměny operací (hlavně sčítání za násobení a odčítání za dělení), při počítání delších řad čísel záměny desítek a jednotek při sečítání, záměny čitatele a jmenovatele, nahrazení složitějších operací jednoduššími. K dalším projevům patří uchylování se k písemným formám řešení u velmi jednoduchých příkladů, počítání na prstech ve vyšších ročnících, kdy již by měly být jednotlivé operace dostatečně zafixovány. Děti s tímto typem poruchy mají zvýšenou chybnost v provádění sčítání a odčítání do 20, v násobení a dělení, dále mají obtíže při řešení kombinovaných úloh, kde je třeba udržet v paměti jednotlivé výsledky. Složitější počítání se vyznačuje pomalostí a vysokou chybností (zvláště při pamětném počítání).

Ideognostická dyskalkulie představuje poruchu chápaní matematických pojmů a vztahů mezi nimi. Jedinec např. ví, že 9 se čte jako „devět" a „devět" se píše jako 9, ale neví, že 9 je o jednu méně než 10, resp. 3x3, nebo polovina z 18, nebo má-li ukázat příslušný počet teček podle napsaného čísla. Dalším projevem je selhávání v řešení úloh, jakmile je pozměněn šablonovitý postup. Obtíže se projevují ve slovních úlohách, které není dítě schopno převést do systému čísel a řešit jej. Za nejtěžší poruchu je považována neschopnost počítat po jedné od daného čísla z hlavy. Nejlehčí stupeň se projevuje v neschopnosti chápat vztahy v matematických řadách (např. pochopit vztah a pokračovat v matematické řadě 5, 10, 15, …).

2.4. DYSKALKULIE A INTELIGENCE

Z definice dyskalkulie vyplývá, že je třeba odlišit obtíže v matematice způsobené poruchou od těch, které odpovídají nižší inteligenci. Dyskalkulie není diagnostikována u dětí s nižším IQ než 90, v odůvodněných případech než 85. Mentální retardace je totiž sama o sobě poruchou, která vzniká na podkladě organického poškození mozku. Je to porucha primární, která natolik ovlivňuje psychiku dítěte, že ji nelze zaměňovat se specifickými vývojovými poruchami učení. Děti s dyskalkulií i jinými specifickými poruchami učení mají průměrnou, někdy až nadprůměrnou inteligenci. Poruchy spojené s vysokým IQ, nemusí být vůbec objeveny.

O. Zelinková (22) uvádí: „Matematické schopnosti tvoří jednu speciální složku struktury inteligence. Dle Košče a dalších autorů, které cituje, do 8-9 let má všeobecná schopnost sedmkrát větší důležitost při školní úspěšnosti než schopnosti matematické. Teprve kolem 12. roku se výrazně uplatňují matematické schopnosti, přičemž však všeobecná inteligence nadále přibližně dvakrát více ovlivňuje úspěchy ve škole. Vzhledem k tomu nelze na základě inteligence usuzovat na úroveň matematických schopností a naopak na základě úspěšnosti v matematice nelze usuzovat na úroveň inteligence.“

2.5. VLIV OSTATNÍCH SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ NA VÝUKU MATEMATIKY

Pokud má student diagnostikovánu některou ze specifických poruch učení, zejména dyslexii a dysgrafii, mohou tyto poruchy výrazně ovlivnit i jeho úspěšnost v matematice.

Dyslexie je specifická porucha čtení, projevující se v některých případech již v úplných počátcích čtení při rozpoznání a zapamatování si jednotlivých písmen, zvláště pak v rozlišování písmen tvarově podobných (b-d, s-z, t-j). Problémem může být i rozlišení zvukově podobných hlásek (a-e-o, b-p). Obtíže takto postižených dětí se promítají do rychlosti čtení, správnosti čtení a porozumění čtenému textu.

Dyslektik může mít v matematice problémy se záměnou tvarově podobných číslic, se zápisem textu pomocí matematického jazyka, s rozlišením geometrických útvarů (čtverec, trojúhelník,…). Dále má dyslexie vliv na schopnost číst s porozuměním matematické znaky, matematický text a zadaní slovních úloh. Při výuce bychom po dyslektikovi neměli žádat čtení nahlas, zbytečně jej to stresuje.

Dysgrafie je specifická porucha psaní postihující zejména schopnost napodobit tvar písmen a řazení písmen. Dítě si nepamatuje tvary písmen, opět zaměňuje tvarově podobná písmena, písmo je neuspořádané, těžkopádné, neobratné. Studenti postižení touto poruchou se dlouho nemohou naučit dodržení lineatury, výšky písma. Přílišné soustředění na grafickou stránku písemného projevu často způsobuje neschopnost soustředit se na pravopisné jevy.

V matematice není dysgrafik schopen zápisu matematických symbolů a matematického textu, zápisu čísel řádně pod sebe, zejména při písemných algoritmech. Dysgrafik má problémy při rýsování, jeho písmo může být nečitelné. V matematice může dysgrafikům pomoci linkovaný nebo čtverečkovaný sešit.

Dysortografie je specifická porucha pravopisu. Znemožňuje dítěti správné zapsání všech písmen ve správném pořadí včetně délek a měkkosti. Tato porucha často souvisí s dyslexií a dysgrafií. Její obraz se během vývoje dítěte mění. V počátcích školní docházky, 1. – 3. ročníku se vyskytuje velké množství tzv. dysortografických chyb: vynechávky, záměny písmen, inverze, zkomoleniny, nesprávně umístěné nebo vynechané vyznačení délek samohlásek, chyby v měkčení. Postupně a při kvalitní péči dělá dítě těchto chyb méně, ale na správné napsání potřebuje více času, než ostatní žáci. V časově limitovaných úkolech (diktáty, písemné prověrky v jakémkoliv předmětu) se dysortografické chyby znovu objevují, přibývají chyby pravopisné i v jevech, které si dítě osvojilo a umí je ústně bez obtíží a správně zdůvodnit.

Někteří učitelé při hodnocení písemek v matematice berou v úvahu i pravopisné chyby, u studentů s dysortografií je třeba od tohoto způsobu hodnocení upustit. Na matematiku má spíše vliv dyslexie a dysgrafie, se kterými bývá tato porucha často spojena, než samotná dysortografie.

Dyspinxie představuje specifickou poruchu kreslení, která je charakteristická nízkou úrovní kresby. Dítě zachází s tužkou neobratně, tvrdě, nedokáže převést svou představu z trojrozměrného prostoru na dvojrozměrný papír, má potíže s pochopením perspektivy.

Dítě trpící dyspinxií zřejmě bude mít potíže s pochopením stereometrie a s rýsováním.

Dysmúzie je specifická porucha postihující schopnost vnímání a reprodukce hudby. Projevuje se obtížemi v rozlišování tónů, dítě si nepamatuje melodii, nerozlišuje a není schopno reprodukovat rytmus. Potíže se čtením a zápisem not spíše souvisí s problémy dyslektickými respektive dysgrafickými.

Dyspraxie je specifická porucha obratnosti, schopnosti vykonávat složité úkony. Tato porucha se může projevit jak při běžných denních činnostech, tak ve vyučování. Děti s dyspraxií bývají pomalé, nezručné, neupravené, jejich výrobky jsou nevzhledné. Jejich obtíže se mohou projevit jak při psaní, tak kreslení, tělesné výchově i při pracovním vyučování, ale také při mluvení, protože dyspraxie může způsobit artikulační neobratnost. V matematice může mít dyspraxie vliv na kvalitu rýsování.

2.6. DALŠÍ PŘÍČINY PROBLÉMŮ V MATEMATICE

Potíže studentů v matematice mohou být ovlivněny způsobem vyučování, věkovou nezralostí, morálními i charakterovými vlastnostmi studenta, přístupem rodičů a v neposlední řadě vývojovými poruchami učení. Pro učitele je velice těžké příčiny správně určit. Nicméně jedině pochopení důvodu neúspěchu může vést ke zlepšení. Níže je uveden seznam některých možných příčin neúspěchu v matematice.

příčiny související s osobností studenta

- věková nezralost – student není schopen v dané době pochopit probírané učivo, ale již za půl roku nebo rok, mu pochopení nedělá problémy
- morální a charakterové vlastnosti – lenost, nervozita, úzkostnost, nesamostatnost, neschopnost přinutit se k systematické práci, atd.
- ztráta naděje na úspěch
- nepříznivá motivace k učení
- špatná paměť
- porucha koncentrace
- lehká mozková dysfunkce
- specifické poruchy učení
- zdravotní potíže a na nich závislá zvýšená únavnost
- poruchy zraku, sluchu, …
- psychické bariéry – obavy z předmětu, z některého tématu, písemek, pětiminutovek, aj.

příčiny související s rodinou

- ztráta odvahy způsobená stálými výtkami rodičů
- zátěž způsobená neuspořádanými poměry v rodině

příčiny související se školou

- role outsidera mezi spolužáky
- častější změna školy a absence ve škole

příčiny související s osobností učitele

- učitel předem očekává snížený výkon
- nedostatečná odborná znalost
- nesprávné používání matematického jazyka

- nedostatečná metodická připravenost
- problémy v komunikaci s žáky
- předávání hotových poznatků (poznatky by si měl student sám odvodit, učitel by měl mít roli „laskavého průvodce“)
- učitel nedokáže motivovat pro svůj předmět
- netrpělivost
- formalismus v práci (učitel řekne, že to tak je, ale sám neví proč)
- neobjektivnost
- vztahovačnost (např.:jestliže se student zasměje, učitel to bere jako útok na svou osobu)
- nedostatečné osobní nasazení

2.7. HODNOCENÍ STUDENTŮ S DYSKALKULIÍ

Při hodnocení studentů se specifickými poruchami učení hodnoťme je samotné a srovnávejme jeho dílčí úspěchy či nedostaky s jeho vlastní osobou, jeho možnostmi a schopnostmi. Nesrovnávejme je s ostatními, dle našeho názoru úspěšnějšími spolužáky ve snaze přimět dítě k vyšší výkonnosti, nezaměňujme problémy vyplývající z poruchy s lajdáctvím. Umožněme dyskalkulikovi zažít pocit úspěchu, poskytněme mu takové podmínky, které pomohou odhalit, co doopravdy umí a dovede.

Každé dítě je neopakovatelnou osobností, u níž se porucha projevuje jiným způsobem, tedy každému vyhovuje něco jiného. Z uvedených doporučení si pedagog může vybrat to, co je vhodné pro jeho studenty, ale stejně tak může využít i mnoho dalších způsobů tolerance.

- preferujme ústní formy zkoušení před písemnou;
- nehodnoťme chyby v písemném projevu, zaměřme se na obsahovou správnost;
- nehodnoťme chyby vzniklé z nedokonalého přečtení textu, což je např. typický prohřešek dyslektiků při řešení slovních úloh v matematice, dítě si špatně přečte zadání úlohy a celý příklad řeší neadekvátně;
- v písemných pracích kontrolujme nejen výsledky, ale i správnost postupu: může docházet k chybám v důsledku neschopnosti vypořádat se s grafickým prostorem nebo v důsledku neschopnosti dodržet nutnou úpravu. Může také dojít k záměně tvarově podobných číslic a číslic zrcadlově obrácených;

- u dysgrafiků hodnoťme s tolerancí i práce při rýsování;
- při hodnocení písemné práce se zaměřme pouze na to, co žák stihl doopravdy vypracovat, nehodnoťme špatnou známkou to, co nestihl. Stručně řečeno, hodnoťme kvalitu nikoliv kvantitu. O tom, zda žák doopravdy vše umí, se můžeme přesvědčit ústně;
- omezme pětiminutovky nebo nechejme dítěti více času;
- dejme dostatek času na vypracování úkolu;
- do celkové známky z prověrek nezapočítávejme úroveň písma;
- řešit slovní úlohy až po přečtení učitelem;
- dítě by mělo vidět příklady napsané, dávejme předtištěné kontrolní práce.

2.8. VÝUKA STUDENTŮ S DYSKALKULIÍ

Při výuce žáků s poruchami učení je nutné uvést několik zásad, které by měli mít na zřeteli učitelé i rodiče:

- diagnóza dyskalkulie neopravňuje dítě k nečinnosti v matematice;
- dyskalkulie není totální neschopnost naučit se matematice. Každé dítě se může matematice naučit, jestliže je pro něj nalezen adekvátní přístup;
- je nutné provést podrobnou diagnostiku nedostatků a chyb a zjistit jejich příčiny;
- je třeba vypracovat podrobný postup a časový plán odstraňování zjištěných nedostatků a projednat ho s rodiči;
- respektovat rozdílnost předpokladů dětí k chápání matematických pojmů a snažit se pochopit co pod příslušnými pojmy dítě vidí;
- nešetřit povzbuzením, pochvalou a oceněním za dobré výkony, ocenit každou snahu, každý sebemenší úspěch; Z. Matějček ještě k tomuto bodu dodává „zlaté vychovatelské pravidlo“: Zařídit věci tak, aby je dítě udělalo dobře a my je za to mohli pochválit. Nepřipustit však, aby udělalo něco špatně a my je za to museli trestat;
- projevit maximální trpělivost a pochopení, počítat s tím, že musíme více dávat než očekávat;

- počítat s tím, že jednou naučené učivo se rychleji zapomíná, než zapamatuje, a že je nutné mnohokrát se v rozmanitých formách vracet ke každému jevu.

Další body již nejsou tak zásadní, přesto mohou velmi pomoci při práci s dyskalkulickým studentem.

- snažit se o maximální využití názorných pomůcek;
- přistupovat k studentům individuálně, klidně a uvědomit si, že některé obtíže budou přes dlouhodobou nápravu přetrvávat;
- u sešitů nehodnotit úpravu;
- nedopustit, aby se dítě naučilo něčemu špatně. Dítě ulpívá na tom, co si jednou osvojilo a těžko se orientuje na nový pracovní postup nebo na nový směr myšlení;
- umožnit jim zážitek úspěchu, nechat je vyniknout;
- nepřipustit, aby vznikl u dítěte pocit méněcennosti**.** Je třeba taktně dítě chránit před příliš trapnými a opakovanými zážitky neúspěchu;
- využít zájmu dítěte, zájem podněcuje a pomáhá udržet pozornost. Má-li se dítě něčemu naučit, je třeba vzbudit jeho zájem;
- pracovat s dítětem pokud možno za dokonalého soustředění. Je dobré když při písemné práci u dítěte stojíme nebo je máme alespoň v dohledu. Zkoušení by mělo probíhat za dobrého soustředění a dobré spolupráce, spíše v první polovině vyučování a na začátku vyučovacích hodin;
- respektovat zásadu „málo a často“. Dítěti vyhovuje spíše krátké a častější učení než soustavné zatěžování jeho pozornosti. Na jednom úkolu dokáže pracovat nejvýše deset minut, potom je nutný odpočinek nebo změna činnosti. Při školní práci je třeba dovolit mu častější přestávky k odpočinku, rychleji střídat úkoly a využívat různých příležitostí k procvičování a opakování;
- využít metodu vyhledávání odpovědí z učebnice na otázky vztahující se k probírané látce, práce s encyklopedií, podtrhávání opěrných bodů v textu výkladu (žáci mají problémy s rozpoznáním nejdůležitějších poznatků);
- vytvořit ovzduší spolupráce;
- umožnit dítěti používat kompenzační pomůcky (např.:kalkulačka);

Učitel, který pochopil podstatu problému specifických poruch učení a chování, je schopen pozitivního přístupu k řešení školních neúspěchů těchto žáků a bude se dále vzdělávat a sám vyhledávat nové podněty pro svou práci. Bude jistě tím, kdo poskytne žákovi či studentovi ve škole podporu, dá mu zažít úspěch a umožní mu tak volbu budoucí profese podle jeho zájmu.

V případě, že potřebuje učitel upřesnit svůj přístup k žákovi, metody reedukace, může se obrátit na pracovníka pedagogicko psychologické poradny pověřeného spoluprací s jeho školou, ale také na výchovného poradce nebo speciálního pedagoga či školního psychologa.

2.9. VÝZNAMNÍ LIDÉ SE SPECIFICKÝMI PORUCHAMI UČENÍ

Dyskalkulie a ostatní specifické poruchy učení nemusí člověka omezit v jeho dalším vývoji a činnosti. Mnoho význačných osobností mělo v dětství problémy a přesto dosáhli vynikajících úspěchů, někteří i v matematice.

Např.: August Rodin, známý díky svým sochám „Myslitel“ a „Měšťani z Calais“. Celý svůj život Rodin nebyl schopen zvládnout školní dovednosti jako pravopis a aritmetika.

Thomas Alva Edison vynálezce elektrické žárovky a fonografu a držitel více jak 1300 dalších patentů. Jeho učitel řekl, že byl „zmatený“ a patřil k horší části třídy. Nikdy nezvládl základní dovednosti jako psaní, pravopis a aritmetiku.

Albert Einstein, největší vědec 20. století, byl schopen velmi nadčasových myšlenek, ale ve škole beznadějně propadal, protože měl velké potíže se čtením (Bylo mu 9, když začal číst). I v dospělosti mu psaní dělalo stále potíže. (20)

Z matematiků např. N. N. Luzin patřil k lidem s pomalou reakcí. Také se pomalu vyvíjel, ve škole neprospíval, dokonce právě v matematice. Rovněž jeden z největších matematiků 20. století David Hilbert dělal dojem tupého, pomalu uvažujícího člověka, který těžko chápe, co mu kdo vykládá. (4)

Fyzik G. Gamov autor známé populární knížky o teorii relativity *Pan Tomkins v říši divů*, který se věnoval základům kvantové mechaniky, fyzice atomů a jejich jader, teorii termonukleárních reakcí ve hvězdách i záhadám genetického kódu, měl zřejmě dyskalkulii. Známá americká astronomka Věra Rubinová, jeho studentka v polovině padesátých let, o něm prohlásila: „Neuměl psát ani počítat. Chvíli mu trvalo, než by vám řekl, kolik je 7 krát 8. Ale jeho rozum byl schopen chápat vesmír.“(7, s. 153)

Na uvedených příkladech je vidět, že i zdánlivě „tupý“ student může být geniální. Neodsuzujme tedy žádného člověka, podle toho, jak se nám jeví, může v něm být skrytý poklad. Úkolem učitele je takové poklady objevit, nikoli zničit.

3. VÝZKUMNÁ ČÁST

Třetí kapitola obsahuje přímé výpovědi několika studentů, učitelů a pracovníků pedagogicko-psychologických poraden, kteří byli ochotni se k problematice dyskalkulie vyjádřit. Uvedené výpovědi jsou autentické, včetně hovorových výrazů a gramatických chyb.

Z těchto rozhovorů jsem dospěla k závěru, že je velmi obtížné najít respondenty, kteří by byli ochotni v dospělém věku přiznat eventuelní problémy z dětství. Najít dyskalkuliky přímo na středních školách je téměř nemožné, protože střední školy nemohou poskytovat informace o svých studentech. Rovněž je velmi obtížné provádět rozhovory s učiteli matematiky středních škol, neboť buď o problematice specifických vývojových poruch učení nemají vůbec žádné informace, nebo se staví k této problematice tak, že střední školy jsou výběrové a tedy tito žáci tam „nemají co dělat“. Je překvapivé, jak malá je informovanost nejen učitelů středních škol. Většina literatury i odborníků se zabývá specifickými vývojovými poruchami učení u dětí na 1. stupni základní školy. Z informací, které mám k dispozici usuzuji, že mnozí studenti s poruchami učení mají problémy i na střední škole (dokonce i dále v dospělosti), nicméně se o nich stydí mluvit. V tomto věku už mnozí ani nenavštěvují pedagogicko-psychologické poradny a tedy se o nich ani neví a zdánlivě, jak je někdy uvedeno v literatuře, se „vyléčili“.

3.1. VÝPOVĚDI UČITELŮ

V prvé řadě bylo třeba najít nějaké dyskalkuliky na střední škole. Ze svého okolí jsem znala chlapce Lukáše, který v roce 2002 odmaturoval na střední zdravotnické škole a dívku Janu, která má vystudované dva dvouleté učební obory (rodinná škola a ošetřovatelka). Jejich výpovědi jsou uvedeny níže. Dále jsem se ptala elektronickou formou svých bývalých učitelů (a jejich kolegů) na Biskupském gymnáziu v Brně, zda ve třídách, které učí není dyskalkulik. Jejich odpovědi byly následující:

Bohužel (nebo bohudík ?) o někom takovém na naší škole nevím. Zkus to přes poradnu na Kohoutové.

Optám se, ale nevím. Tady ale asi nikdo takový moc nebude- těžko by dělali přijímačky.

Zajímavá byla také reakce mého spolužáka, potenciálního budoucího učitele matematiky, na téma mé diplomové práce: *„A o čem chceš psát, když se ji nemůžou naučit.“* Na tomto místě bych chtěla zdůraznit, že dyskalkulie není totální neschopnost naučit se matematice, ale neschopnost naučit se matematice běžnými metodami. Je možné, že názor kolegy vychází ze zkušenosti s prací s lidmi, kteří se při učení na specifickou poruchu učení vymlouvali. Zde je třeba zdůraznit, již uvedené, ale důležité: diagnóza dyskalkulie neopravňuje studenta k nečinnosti.

Dále jsem požádala své spolužáky, kteří byli na pedagogické praxi na středních školách, aby zjistili, zda na školách na kterých učí není dyskalkulik. Pozoruhodná byla reakce jedné středoškolské učitelky, která dělí dyskalkuliky na tři skupiny:

- *jedna skupina jsou ti co nedokáží spočítat numerické příklady, ale s kalkulačkou to dokáží a v ostatních předmětech jsou OK - tak u těch se nikdy nepozná jestli to jen nehrají;*
- *druhá skupina jsou ti co jsou „špatní“ ve všech předmětech - tak proč zdůrazňovat problémy s matematikou;*
- *třetí skupina jsou úplní idioti.*

Touto cestou jsem byla upozorněna na Střední pedagogickou školu, kde v roce 2003 maturovala dyskalkulička a nyní tam studují 2 dyskalkulici ve 3. ročníku. Zkušenosti jejich učitelky matematiky zde uvádím:

Dyskalkulici zaměňují čísla a také znaménka + a -. Z tohoto důvodu mají povolenou kalkulačku. Problémy dělá i určení větší, menší, rovnice (převádění z jedné strany na druhou), nerovnice, úprava výrazů (převádění na společného jmenovatele, závorky, znaménka), soustava rovnic (sčítací metoda - něco sečte a něco odečte podle toho jak se mu to hodí). Nyní začínáme probírat funkce, což zatím zvládají dobře (funkce sudá, lichá, omezená, minimum, maximum, obor hodnot, definiční obor). S geometrií má jeden menší potíže a druhý je bez potíží.

Na práci potřebují absolutní klid. Při písemce nesmí nikdo promluvit nahlas, pokud někdo něco chce přihlásí se, já k němu jdu a šeptem se domluvíme. Pokud jsou u tabule a udělají chybu, začnou panikařit, je třeba je hned uklidnit. S jednou dívkou mám domluvené, že pokud neví tak na mě mrkne a já jí pomůžu, aby se dlouho netrápila.

Studenti mají možnost mě kdykoli v hodině zastavit a zeptat se: „Jak jste na to přišli?“. Po vyřešení příkladu, znovu zopakuji myšlenkový postup, někdy také nechám někoho ze třídy vysvětlit probíranou látku, při vysvětlování, totiž nepoužívá tolik odborných výrazů a ostatním studentům to může pomoci v pochopení. Já pouze *kontroluji obsahovou stránku. V hodinách neexistuje, abych řekla: „To jsi měl už dávno umět, tak máš za 5.“ V hodinách se mohou ptát na cokoliv, hodnotím pouze písemky, zkoušení a domácí úkoly. Kdykoliv mohou přijít na konzultaci.*

Studentům s dyskalkulií matematika nejde, potřebují jí věnovat více času, tedy se ji neradi učí. Pak je velmi těžké poznat, co je způsobeno dyskalkulií a co se nenaučili. Vzhledem k tomu, že mají možnost za mnou kdykoliv přijít a na písemku dávám příklady z učebnice, tak v konečném hodnocení jim neulevuji (o půl stupně ano, ale pokud mají samé pětky tak ne). Jednomu dyskalkulikovi hrozila na vysvědčení pětka, dokázal se naučit na krásnou trojku a ani nepotřeboval kalkulačku.

Hoch na to kašle a je vzteklý, nevím jestli to také může být způsobeno dyskalkulií. Dívka se s tím pere, nakonec to dá dohromady.

Po té co jsem se dozvěděla, že mám ve třídě dyskalkulika, začala jsem se o to zajímat, byla jsem i v poradně. Pro střední školy toho moc není, většina materiálů je pro 1. stupeň ZŠ. To co jsem kvůli nim zavedla (absolutní klid při písemce, možnost kdykoliv se ptát,…) prospělo celé třídě.

Mluvit přímo se studenty mi nebylo umožněno, neboť škola nemůže poskytovat informace o studentech.

Na gymnáziu na Slovanském náměstí, je učitel, který mi nejprve tvrdil, že měl ve třídě dyskalkulika, po té si vzpomněl, že byl pouze dysgrafik. Nicméně jeho diagnóza se velmi promítala i do matematiky, tak uvádím i jeho zkušenosti:

- *psal hrozně, čísla se nedala poznat, dohodli jsme se, že 7 se bude od 1 lišit přeškrtnutím.*
- *matematické myšlení měl výborné.*
- *hlásil se na odbornou fyziku do Prahy (na to bych si netroufl ani já sám), tam se dostal bez přijímaček, díky účasti v celostátním kole matematické olympiády (což jsem mu doporučil, písemné přijímací zkoušky by zřejmě nezvládl).*

3.2. VÝPOVĚDI STUDENTŮ

Stěžejní částí jsou přímé výpovědi studentů, se kterými jsem měla možnost mluvit. Ale jsou zde také uvedeny výpovědi lidí, kteří mi o studentech s dyskalkulií vyprávěli, ale buď již na ně neměli kontakt, nebo mi jej nechtěli dát, právě z důvodu studu.

3.2.1. Přímý kontakt

Jana

Navštívila jsem dívku Janu, která má dyskalkulii a také dyslexii. Velice pěkně se rozpovídala a zde uvádím její zkušenosti a názory:

Slyšela jsem, že by se problémy s dyskalkulií v adolescenci měly zlepšit, ale u mě to tak není ani u víc lidí co znám.

Chodila jsem do specializované třídy pro dyslektiky na ZŠ Mendlovo náměstí. Jediný rozdíl oproti normální třídě byl v tom, že nás bylo 15 a že jsme byli slovně hodnoceni (např.: ovládá, v podstatě ovládá, ovládá se značnými mezerami). Menší počet žáků ve třídě mi nepomohl, spíš bych potřebovala individuální práci.

Já osobně si myslím, že není dobré dávat žáky do specializovaných tříd. Není pak takový nátlak a vede k rezignaci a averzi (vykašle se na to). (Žák učitelce:"Já to číst nebudu, já to neumím, já se na to můžu vykašlat."). Je to i tím okolím, vidíš to kolem sebe. Bylo by lepší být v normální třídě, pak je ale potřeba učitel, který to chápe a neponižuje. Na děcka musíš trochu tlačit, aby se něco naučili. Můžeš to z nich vydupat.

Umím sčítat, odčítat, trochu násobit, ještě míň dělit. Zlomky vůbec. Neorientuji se v tom, nevím o čem to je. Když mám něco počítat mám strach, že to sama neudělám, že to nezvládnu. Je lepší, jestliže vedle mě někdo sedí, vím, že mi pomůže, když nebudu vědět jak dál. Rýsování mě bavilo, ale nechápala jsem zadání, ještě když ho blbě přečteš (problémy se zadáním platí obecně). Pokud učitelka vysvětlila co se chce, bylo to lepší. Projevovalo se to zvlášť u písemek. Vzorec se dá naučit, ale nedovedeš ho dát dohromady s číslem a seš v kopru. Stačí jinak závorka, znaménko a nevíš si rady. Nemohli jsme používat kalkulačku.

Mám dobrou paměť, vyhrávala jsem soutěže na paměť (i třeba pexeso). U češtiny se dají věci zapamatovat, ale u matiky ne. V češtině si zapamatuješ co se jak píše, ale matematice je každý příklad jiný.

Jednou za rok máš jít na psychologické vyšetření, tam Tě má odeslat učitel, ale ten to nechává na rodině. Vyšetření je delší. Záleží na rodině - rodina je důležitá. Psycholog pozná jestli tomu fakt nerozumíš, nebo je to z lenosti.

Děckám se při čtení stávalo, že přidávali písmena, já jsem je spíš vynechávala. Ty tomu rozumíš, ale ostatní ne. Písmena se také pletla l-t, b-d, o-v. U delších souvětí se stává, že větu nedočteš, ale domyslíš. Nedojde Ti to, až Tě někdo upozorní.

Při učení mi pomáhala praxe, když jsem se něco naučila a pak to viděla v praxi.

Hruštičky, švestičky a furt seš na nule. Tam se to pořád vysvětluje na jablíčkách a hruštičkách.

Hlásila jsem se na střední školu (zdravotní sestra). Zástupkyně ředitele mi řekla: „Co se hlásíte na školu, kde je matematika?“

Lukáš

U Lukáše došlo na SŠ ke zlepšení dyskalkulie, přesto měl stále problémy se zlomky a se všemi druhy rovnic, ale byl schopen se to naučit, dle jeho slov:„Nalili mi to do hlavy.“. Neměl problémy se základními operacemi (sečítání, odčítání, násobení, dělení), se slovními úlohami a jejich převedení do matematické podoby, s geometrií, rýsováním, funkcemi a jejich grafy, goniometrií.

3.2.2. Nepřímý kontakt

Na fakultě informatiky Masarykovy univerzity studuje dyskalkulik. O tomto studentovi vím jen zprostředkovaně přes jeho kamarády, kteří mi na něj nechtěli dát kontakt. Student o své poruše nerad mluví, stydí se za ni. Údajně mu nedělá problémy i vysoce abstraktní myšlení, velké problémy má s důkazy, zejména s matematickou indukcí. Otázkou zůstává zda nerozumí podstatě matematické indukce, či mu dělá potíže práce se symboly, úprava vzorců, apod.

Žák 2. stupně základní školy, který má mimo jiné poruchy učení i dyskalkulii, se setkal se špatným přístupem učitelky matematiky. Učitelka mu slíbila lepší známku vzhledem k dyskalkulii, nicméně známku nakonec nezlepšila. Tento přístup vedl u žáka k rezignaci, k postoji vyjádřeném jeho slovy: „Mě je to jedno.“

Zkušenost dívky, jenž doučovala žákyni 2.stupně ZŠ, která se bohužel také nesetkala se správným přístupem učitelky k dyskalkulii. V tomto případě učitelka matematiky nebrala v úvahu poruchu učení, dokonce byla proti soukromému doučování. Doučování muselo probíhat tajně.

3.3. VÝPOVĚDI PRACOVNÍKŮ Z PEDAGOGICKO-PSYCHOLOGICKÝCH PORADEN

Znojmo

Mgr. Miluše Horová

V pedagogicko-psychologické poradně ve Znojmě nemáme diagnostikovaného žádného dyskalkulika, který by navštěvoval střední školu, z druhého stupně základní školy máme jednoho žáka. Ale to neznamená, že na Znojemsku nikdo takový není. Děti, které mají problémy s matematikou si vybírají střední školy, kde je matematiky méně a tedy se porucha tolik neprojevuje.

Dyskalkulici mají problémy s matematikou neustále, stále se musí vracet k základům (násobení, přechod přes desítku,…). Devadesát procent dětí, které mají problémy se čtením mají problémy i v matematice, zvláště ve slovních úlohách. Většina má problémy s pozorností, zvýšenou nebo sníženou aktivitou, se špatným pracovním tempem. Základem je zraková a sluchová percepce, prostorová a pravo-levá orientace.

Při diagnostických testech se zjišťují specifické matematické schopnosti:

- **percepční** (percepce=vjem,vnímání) - zda dítě zvládá seřadit a roztřídit prvky, rozlišit část a celek, nahoře a dole, vpravo a vlevo, zda se orientuje v čase (zítra, jaro, léto, atd.). Pokud se dítě neorientuje v čase těžko zvládá pojmy o 1 větší či menší. Dále se zjišťuje zraková a sluchová percepce (rozlišení figury a pozadí; záměna slov tři a čtyři, reprodukce rytmu). Na prostorové faktory se využívá Rey-Ostereith. figura, číselný trojúhelník, zakreslení bodů do mřížky, umístění tvaru do prostoru.
- **verbální** – verbalizace číselné řady (vzestupně, sestupně, po desítkách, po stovkách, vzestupně od 43, 547), zakreslení čísla do číselné osy, poziční hodnota číslic (které číslo z 38 a 83 je větší a proč?), rozklad čísla, struktura čísla (3548=3.1000+5.100+4.10+8.1), zápis čísel pod sebe, zápis desetinného čísla, zlomku.
- **lexické** – čtení čísel (17, 71, 103, 301, 1060, …), zda pro dítě číslo 5384 neznamená jen seřazená čísla 5, 3, 8, 4 za sebou.
- **operační** – základní číselné operace s vizuální a auditivní oporou, číselné operace s mezisoučtem ($8-6+9$, $11 \cdot 10 \cdot 10+10$).
- **paměťové –** grafická a verbální reprodukce vizuálních podnětů, opakování čísel.

- **úsudku –** princip korespondence, aplikace číselných operací (doplň 8 2 = 6), slovní úlohy, doplnění číselných řad, slovní úlohy, analogie.

Dyskalkulie se diagnostikuje u dětí s IQ 90-110. Většina dětí má problémy s aplikací naučeného. Pochopení součtu 8+6 se vyzkouší na 80+60. Často mívají problém s rozkladem čísla 8=6+2=4+4. Náprava se provádí pomocí tyčinek (ze špejlí), kdy má dítě před sebou 8 tyčinek a „hraje" si s nimi. Některým dětem dělá problém opisování z tabule, musí správně přečíst, zapamatovat si a správně napsat, některým spíš vyhovuje diktát. Na střední škole by měli zvládnout zlomky, rovnice a výrazy. Po toto jsou schopni dojít, dál by se nutit neměli.

Brno – pedagogicko – psychologická poradna Kohoutova

Máte v poradně nějaké dyskalkuliky, kteří navštěvují SŠ? *ANO.*

Kolik jich asi je? *2 měsíčně.*

Studují někteří na gymnáziu? *Ano (nyní jsou v péči 2 - na 8letém gym.).*

Mají dyskalkulici ve vaší poradně i jiné spec. poruchy učení? *Někteří.*

Došlo u žáků v adolescenci ke zlepšení? *Zatím máme málo takových, které bychom sledovali delší dobu. Spíše jsou to diagnostikovaní dyskalkulici až na SŠ, proto těžko odpovědět.*

Mají i dyslektici, dysgrafici, aj. problémy v matematice (pokud možno na SŠ)? *Ano.*

Pokud ano, jaké?

Setkali jste se i s žákem, který neměl žádnou specifickou poruchu učení, přesto měl problémy v matematice? *Ano*.

Jaké a čím byly způsobeny?

Jak probíhá náprava dyskalkuliků ze SŠ?

Odpověď na některé otázky je hodně obšírná, proto ji z časových důvodů nerozepisuji. Odpověďmi na tyto otázky se zabýváme v akreditovaném programu Dyskalkulie-reedukace a diagnostika, který je v rozsahu 22 hodin.

4. ALGEBRA

Algebra je základním tématem matematiky na střední škole. Problémy s operacemi s čísly, které se projevovaly 1. stupni základní školy, se posouvají do tohoto tématu. Algebra vyžaduje obecnost myšlení, čehož někteří dyskalkulici jsou schopni a jiní ne.

Při zpracovávání této části prací jsem vycházela z materiálů (17, 18), které jsem doplnila dalšími příklady a komentáři. Nejprve však stručně uvedu obsah výuky algebry na střední škole.

4.1. STANDARDY Z MATEMATIKY PRO ČTYŘLETÁ GYMNÁZIA

V této kapitole uvádím pouze základní standard, nikoliv maturitní standard, jak je uveden ve Standardech a testových úlohách z matematiky (6). Tento standard nám poslouží k představě toho, co by měl každý student střední školy zvládnout.

VÝRAZY

Mnohočleny

- Ovládat pojmy: člen, koeficient a stupeň mnohočlenu; uspořádání mnohočlenu, hodnota mnohočlenu, nulový bod (kořen) mnohočlenu.
- Znát zpaměti a umět použít vzorce: $(a+b)^2$, $(a-b)^2$, $(a+b)^3$, $(a-b)^3$, a^2-b^2, a^3+b^3, a^3-b^3.
- Umět rozložit mnohočlen na součin (včetně rozkladu kvadratického trojčlenu na součin lineárních dvojčlenů užitím vztahů mezi kořeny a koeficienty kvadratického trojčlenu).

Lomené výrazy

- Umět provádět základní početní operace s výrazy s vědomím, že součástí je vždy stanovení podmínek řešení.

Výrazy s mocninami a odmocninami

- Umět provádět základní operace s mocninami a odmocninami.

ALGEBRAICKÉ ROVNICE A NEROVNICE

- U rovnic i nerovnic aktivně ovládat pojmy: rovnice (nerovnice) s jednou neznámou; levá, pravá strana; obor (též definiční obor); kořen (též řešení); víceznačnost termínu řešení: 1. postup, kterým určíme množinu všech kořenů rovnice (nerovnice), 2. množina všech kořenů rovnice (nerovnice), 3. libovolný prvek (kořen) rovnice (nerovnice); důsledková úprava, ekvivalentní úprava; zkouška; rovnice (nerovnice) s parametry a její diskuse řešení vzhledem k parametrům; rovnice (nerovnice) s více neznámými; soustava *m* rovnic (nerovnic) s *n* neznámými; numerické řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav; grafické řešení rovnic, nerovnic a jejich soustav.

- Rozlišovat pojmy: rovnost – rovnice, nerovnost – nerovnice.

Rovnice

- Umět využít ekvivalentních úprav: k vyjádření neznámé ze vzorce; k řešení lineárních rovnic s jednou neznámou.
- Umět co nejefektivněji řešit všechny typy kvadratických rovnic.
- Znát a umět uplatnit vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice.
- Umět správně postupovat při řešení rovnic s neznámou ve jmenovateli (využití definičního oboru nebo zkoušky).
- Umět řešit iracionální rovnice. Vědět, kdy je zkouška nutnou součástí řešení.
- Umět řešit rovnice obsahující výrazy s absolutní hodnotou.
- Umět jednotlivé typy rovnic řešit i v daných množinách.
- Umět efektivně řešit soustavy lineárních rovnic s více neznámými.
- Umět znázornit graficky řešení soustav lineárních rovnic se dvěma neznámými.
- Umět početně řešit soustavy lineární a kvadratické rovnice se dvěma neznámými.
- Umět řešit slovní úlohy užitím rovnic nebo jejich soustav.

Nerovnice

- Pomocí ekvivalentních úprav umět řešit lineární nerovnice.
- Umět řešit nerovnice v součinovém a podílovém tvaru.
- Umět řešit kvadratické nerovnice i s využitím představy o grafu kvadratické funkce.
- Umět řešit nerovnice obsahující výrazy s absolutní hodnotou.
- Umět řešit soustavy nerovnic s jednou neznámou, sestavené z nerovnic předcházejících typů.
- Umět graficky znázornit řešení soustav nerovnic (nebo rovnic a nerovnic) se dvěma neznámými.

4.2. OSNOVY MATEMATIKY PRO GYMNÁZIA

V učebních osnovách pro střední školy je uveden pouze obsah učiva, nikoliv rozdělení do jednotlivých ročníků ani hodinové dotace k jednotlivým tématickým celkům. Každá škola si určuje svůj učební plán, většinou je stanoven předmětovou komisí. Na většině škol se přibližně drží starých osnov.

V současné době se připravuje rámcový vzdělávací program (dále RVP). Základní východisko pro tvorbu RVP je požadavek dát školám více volnosti ve volbě vlastních vzdělávacích cest, metod výuky, pojetí obsahu i struktury učiva. Z úrovně státu se vytvářejí vzdělávací programy, v nichž se rámcově formulují zásadní požadavky na cílové a obsahové zaměření vzdělávání a na výstupní kompetence žáků. Tyto rámcové vzdělávací programy tvoří základ pro rozpracování školních vzdělávacích programů, do nichž si školy promítají rámcové požadavky tak, aby vyhovovaly jejich specifickým podmínkám (např.: zaměření školy, materiální a profesní vybavení školy). RVP je členěn na vzdělávací oblasti, jednou z nich je matematika a její aplikace.

Níže je uvedena možná osnova gymnázia, jsou v ní zahrnuta pouze matematická témata. Tato osnova nám poslouží k představě kdy se studenti s jakým tématem seznámí.

Pokud není dostatečný počet vyučovacích hodin (např.humanitní obor) zpravidla se vynechává limita posloupnosti, nekonečná geometrická řada, analytická geometrie v prostoru, komplexní čísla a diferenciální a integrální počet.

1.-4. ročník osmiletého gymnázia

1.ročník – dělitelnost přirozených čísel,
úhly a jejich velikosti,
celá čísla,
osová a středová souměrnost,
desetinná čísla, zlomky,
krychle a kvádr,
racionální čísla,
trojúhelníky,

2.ročník – poměr, přímá a nepřímá úměrnost,
procenta,
rovnoběžníky a čtyřúhelníky,

druhá mocnina a odmocnina,
Pythagorova věta,
hranol,
základy statistiky a finanční matematiky,
kružnice, kruh, válec,
proměnné, výrazy, mnohočleny,

3.ročník – mocniny s přirozeným a celým exponentem,
lineární rovnice a nerovnice,
konstrukční úlohy,
lomené výrazy,
lineární rovnice s neznámou ve jmenovateli,
jehlan, kužel, koule,

4.ročník – soustavy dvou lineárních rovnic,
podobnost,
goniometrické funkce v pravoúhlém trojúhelníku,
funkce.

1.-4. ročník čtyřletého gymnázia, 5.-8. ročník osmiletého gymnázia

1.ročník čtyřletého, 5.ročník osmiletého gymnázia – základní poznatky z matematiky,
číselné obory,
algebra,
planimetrie,

2.ročník čtyřletého, 6.ročník osmiletého gymnázia – funkce,
goniometrie a trigonometrie,
stereometrie,

3.ročník čtyřletého, 7.ročník osmiletého gymnázia – kombinatorika,
pravděpodobnost a statistika,
posloupnosti,
analytická geometrie (vektory a lineární útvary),

4.ročník čtyřletého, 8.ročník osmiletého gymnázia – analytická geometrie kvadratických útvarů,
komplexní čísla,

základy diferenciálního a
integrálního počtu.

4.3. KLASIFIKACE CHYB V ÚPRAVÁCH ALGEBRAICKÝCH VÝRAZŮ

Dobrá znalost úprav algebraických výrazů je nezbytným předpokladem dalšího studia, neboť většina témat matematiky tuto znalost předpokládá. Pro učitele je důležité poznat, jaké druhy chyb se nejčastěji vyskytují. Při výkladu látky pak ví, na které oblasti je třeba se zaměřit, co je třeba zvlášť procvičit. Chyby provázející úpravy algebraických výrazů můžeme rozdělit do několika skupin (8):

a) **numerické chyby**

- chyby vyplývající z nesprávných operací s koeficienty:

$6(x+2)=6x+14 \qquad (4x-7)(x-4)=4x^2-4x-7x+28$

b) **podstatné chyby**

- chybná znaménka při roznásobení závorky záporným číslem

$12-(x+5)=12-x+5$

- záměna druhé mocniny dvojčlenu a součtu nebo rozdílu druhých mocnin:

$(a-b)^2=a^2-b^2$

- chybné znaménko členu $2ab$ při umocňování dvojčlenu
- násobení dvojčlenů: $(a+b)(c+d)=ac+bd$
- nesprávné krácení: $\frac{a^2+ab}{a^2}=ab \qquad \sqrt[3]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}=\frac{a}{b}$
- nesprávné odmocňování: $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$
- špatné určení definičních oborů
- chyby vyplývající z nesprávné strategie řešení – např. zbytečné roznásobování nebo umocňování výrazů místo krácení
- chyby vyplývající z neznalosti operací s mocninami: $2x^2+3x^3=5x^5$

c) **chyby způsobené zápisem**

- nepřehledné, neúplné zápisy, nedopsané znaky, nedbalé psaní cifer a písmen, škrtání, přepisování
- chyby velkých kroků – např. znaménko „-“ před závorkou, která se současně upravuje

$$\frac{x+2}{2x-1}-\frac{3-x}{x+4}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2+6x+4+2x^2-5x+3}{(2x-1)(x+4)}=1$$

d) **chyby vyplývající z psychiky studenta**

- roztržitost, nesoustředěnost (špatné přečtení či opsání zadání)
- vliv časové tísně
- bezradnost, tápání, ztráta orientace, neschopnost najít cestu k řešení
- špatný zápis dobře myšleného postupu
- bariéra „bílého papíru“ (obavy z pětiminutovek a písemných prací)
- chyby vyplývající z nesprávného pochopení diktovaného zadání

Další příklady chyb:

Chyby vyplývají z nesprávného pochopení práce s mnohočleny, mocninami, zlomky.

$5a+2b=7ab$ $\quad$ $5a-2a=3$ $\quad$ $5a+2a=7a^2$ $\quad$ $5a\cdot 2a=10a$

$5a^2b+2ab^2=7a^3b^3$ $\quad$ $6a^2:3a^2=2a^2$ $\quad$ $a^2+a^3=a^5$ $\quad$ $a^2\cdot a^3=a^6$

$\frac{ax+y}{az}=\frac{x+y}{z}$ $\quad$ $\frac{ax+by}{a+b}=x+y$ $\quad$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ $\quad$ $3\frac{a}{b}=\frac{3a}{3b}$

4.4. TŘI ÚROVNĚ ALGEBRY

Používání písmen ve významu čísel se již probírá na základní škole, přesto na střední škole dělá problémy. Obtížnost zvládnutí učiva spočívá v nárocích na abstraktní myšlení a zobecňování. Mnoho problémů může být způsobeno formalismem.

K pochopení algebry je důležité si uvědomit různé významy písmen v matematice:

- proměnná, např.: $y=kx+q$, kde x, y jsou proměnné
- konstanta, např.: $y=kx+q$, kde k, q jsou konstanty
- jediné, jednou pro vždy dané číslo, např.: π, e, i
- označení neznámé v rovnici

Student musí pochopit, že písmeno má v matematice mnoho funkcí. Pro studenty, kteří mají v matematice problémy, je potřeba vymýšlet nové postupy, k nimž patří postup algebraický, aritmetický a geometrický.

Z didaktického hlediska je vhodný postup ve třech stupních (8, s.144) :

1) **Modelování**, které spočívá

a) ve vyjádření slovního textu pomocí symbolů, např.: pojem „sudé číslo“ zapíšeme $2n, n \in \mathbf{Z}$

b) ve využití modelů při práci s algebraickými výrazy

2) **Standardní manipulace se symboly**, která spočívá v úpravách algebraických výrazů podle známých vztahů (většinou tvoří obsah školské matematiky)

3) **Strategická manipulace se symboly**, která spočívá ve vyhledávání vhodných strategií k řešení úloh, řešitel nevystačí s nacvičenými postupy, jsou třeba myšlenkové operace (např.: úlohy matematické olympiády)

4.4.1. Modelování

Modelování je nejnižší, ale nejdůležitější hladina jazyka algebry. Bez něj bychom nemohli pracovat dál. Modelování se používá při řešení většiny slovních úloh, při počítání délek, obsahů, objemů, úhlů, v analytické geometrii, atd.

4.4.1.1. Typy úloh k vyjádření slovního textu pomocí symbolů

První fází je zápis slovního vyjádření pomocí symbolů. K tomu jsou vhodné následující příklady:

V následujících příkladech je možné využít jen pravý sloupec, ve kterém je obecné vyjádření. Nebo je možné začít v levém sloupci a vždy přejít k obecnému vyjádření do pravého sloupce, což podpoří správné pochopení významu algebraických výrazů.

1. Zapište číslo, které je

a) o pět větší než čtyři	o pět větší než číslo a
b) o sedm menší než 12	o sedm menší než číslo b
c) třikrát větší než 6	třikrát větší než y
d) dvakrát menší než 8	dvakrát menší než x
e) pětkrát větší než součet čísel 2 a 5	pětkrát větší než součet čísel x, y

2. Zapište pomocí výrazů:

a) součet čísel 4 a 6 vynásobte sedmi	součet čísel x a y vynásobte sedmi
b) rozdíl čísel 15 a 7 vynásobte pěti	rozdíl čísel a, b vynásobte pěti
c) součet čísel 7 a 5 vynásobte jejich rozdílem	součet čísel x, y vynásobte jejich rozdílem

d) polovinu čísla 18 vynásobte třemi polovinu čísla c vynásobte číslem d

3. Zapište pomocí výrazů:

a) součin čísel a, b zvětšete o jejich podíl

b) podíl čísel a, b vynásobte dvojnásobkem čísla x

c) třetinu čísla a vynásobte podílem čísel $3, a$

d) trojnásobek součtu čísel a, b zmenšený o jejich podíl

Naopak je také nutné, aby studenti uměli algebraické výrazy číst:

4. Vyjádřete slovní formulací:

a) $x + 7$

b) $a - b$

c) $3(x - y)$

d) $2a + 2b$

e) $ab + cd$

f) $\frac{x}{y} = 5$

Pro pochopení významu obecného vyjádření je možné využít tyto úlohy:

5. Úlohy vedoucí k postupnému zobecňování:

I.

a) Koupím si 3 sešity po 12 Kč a 4 tužky po 3 Kč. Kolik korun zaplatím?

b) Koupím si a sešitů po 12 Kč a b tužek po 3 Kč. Kolik korun zaplatím?

c) Koupím si a sešitů po x Kč a b tužek po y Kč. Kolik korun zaplatím?

II.

a) Délka místnosti je 5 m, šířka 4,5 m, výška 2,8 m. Jaký je objem místnosti?

b) Délka místnosti je 5 m, šířka 4,5 m, výška c m. Jaký je objem místnosti?

c) Délka místnosti je 5 m, šířka b m, výška c m. Jaký je objem místnosti?

d) Délka místnosti je a m, šířka b m, výška c m. Jaký je objem místnosti?

III.

a) Z desky bylo nařezáno 10 čtverců o straně 2 cm a 4 čtverce o straně 5 cm. Nezůstal žádný odpad. Jaký byl obsah desky?

b) Z desky bylo nařezáno 10 čtverců o straně x cm a 4 čtverce o straně y cm. Nezůstal žádný odpad. Jaký byl obsah desky?

c) Z desky bylo nařezáno k čtverců o straně x cm a p čtverců o straně y cm. Nezůstal žádný odpad. Jaký byl obsah desky?

6. Zápis slovního vyjádření pomocí symbolického zápisu je vhodné ilustrovat na slovních úlohách, např.:

Pes a osel šli s nákladem, pes naříkal, že nese mnoho. Osel mu říká:

(označíme počet pytlů psa x, počet pytlů osla y)

Jestli si vezmu 1 tvůj pytel	$x-1$
budu mít	$y+1$
dvakrát tolik co ty.	$y+1=2(x-1)$
Jestli ti dám jeden pytel	$y-1$
budeš mít	$x+1$
tolik co já.	$y-1=x+1$

[pes nesl 5 pytlů, osel 7 pytlů]

7. Studenti si zakoupili na divadelní představení m vstupenek po x Kč a n vstupenek po y Kč.

a) Kolik vstupenek studenti zakoupili?
b) Kolik korun za ně zaplatili?
c) Kolik korun studentům vrátili u pokladny, když dva z nich náhle onemocněli?

[a) $m+n$; b) $m \cdot x + n \cdot y$; c) $2x$ nebo $2y$ nebo $x+y$]

8. Slovní úlohy k jejichž obecnému řešení využijeme zápisu čísla pomocí písmene:

a) Mysli si libovolné přirozené číslo, vynásob je dvěma, k výsledku přičti 5, získané číslo násob třemi a k výsledku přičti 15. Sděl mi výsledek, povím ti, které číslo sis myslel.

$[(a \cdot 2+5) \cdot 3+15=6a+30]$

b) Myslím si číslo, vypočítám jeho druhou mocninu a přičtu osminásobek myšleného čísla. Výsledek je 9. Které číslo jsem si myslel?

[dvě řešení:1,-9]

c) Den narození vynásob 20, přičti 3, výsledek vynásob 5, přičti číslo měsíce, výsledek vynásob 20, přičti 3, získané číslo vynásob 5 a přičti poslední dvojčíslí roku narození. Sděl mi výsledek, řeknu ti datum narození.

[odečti 1515]

d) Pořadové číslo měsíce vynásob dvěma, součin vynásob deseti, přičti 73, výsledek vynásob pěti a přičti číslo dne narození. Sděl mi výsledek, řeknu ti datum narození.

[odečti 365]

e) Mysli si libovolné trojciferné číslo. Číslo na místě stovek vynásob dvěma, k součinu přičti 3, výsledek vynásob pěti a k získanému číslu přičti číslo zapsané na místě desítek, k výsledku připiš zprava číslo zapsané na místě jednotek myšleného čísla. Sděl mi výsledek, řeknu ti myšlené trojciferné číslo.

[odečti 150]

Tento typ příkladů je pro studenty atraktivní, podobné příklady mohou i sami vymyslet.

4.4.1.2. Využití modelů

Studenti mohou mít k pochopení učiva různé přístupy. Někteří preferují postupy aritmetické, jiní algebraické a další preferují postupy geometrické. Pro tyto skupiny uvádím příslušné postupy:

Algebraický přístup

Student chápe obecný zápis pomocí písmen a je schopen s algebraickým výrazem pracovat.

Student pochopí algebraické odvození vzorců:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$$

Mnozí studenti neumí správně násobit dvojčleny, tedy se jim toto odvození bude zdát podivné. Uvěří, že to tak skutečně je až po geometrickém znázornění, nebo po té co si dosadí několik konkrétních čísel (následující přístupy).

Aritmetický přístup

Student pochopí platnost různých vztahů na základě operací s přirozenými nebo racionálními čísly, které dosazuje za proměnné. Dosazení konkrétních čísel nejsugestivněji studenty přesvědčí o jejich chybném postupu (např. typu $(a+b)^2 = a^2 + b^2$). Můžeme využít následujících tabulek, ve kterých je zadáno pouze záhlaví, příp. hodnoty a, b.

např.:

a	b	a^2	b^2	a^2+b^2	$a+b$	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$
2	3	4	9	13	5	25	25
-2	3	4	9	13	1	1	1
2	-3	4	9	13	-1	1	1
-2	-3	4	9	13	-5	25	25
5	7	25	49	74	12	144	144
2	0,1	4	0,01	4,01	2,1	4,41	4,41
3,4	5,8	11,56	33,64	45,2	9,2	84,64	84,64

a	b	a^2	b^2	a^2-b^2	$a-b$	$(a-b)^2$	$a^2-2ab+b^2$
2	3	4	9	-5	-1	1	1
-2	3	4	9	-5	-5	25	25
2	-3	4	9	-5	5	25	25
-2	-3	4	9	-5	1	1	1
5	7	25	49	-24	-2	4	4
2	0,1	4	0,01	3,99	1,9	3,61	3,61
3,4	5,8	11,56	33,64	-22,08	-2,4	5,76	5,76

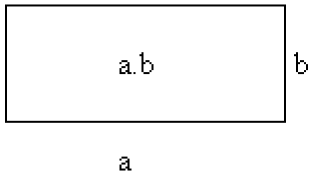
a	b	a^2	b^2	$a-b$	$a+b$	a^2-b^2	$(a+b)(a-b)$
2	3	4	9	-1	5	-5	-5
-2	3	4	9	-5	1	-5	-5
2	-3	4	9	5	-1	-5	-5
-2	-3	4	9	1	-5	-5	-5
5	7	25	49	-2	12	-24	-24
2	0,1	4	0,01	1,9	2,1	3,99	3,99
3,4	5,8	11,56	33,64	-2,4	9,2	-22,08	-22,08

Geometrický přístup

Student snadněji chápe vztahy pomocí geometrického znázornění, např. pomocí obdélníků, kvádrů, krychlí apod. Pro tuto skupinu je vhodné k pochopení některých výrazů využít geometrického znázornění, které je na následujících obrázcích. Většinu studentů aritmetický přístup přesvědčí o správnosti vzorců, ale některým nemusí být jasné proč tomu tak je. K pochopení jim může pomoci geometrický přístup.

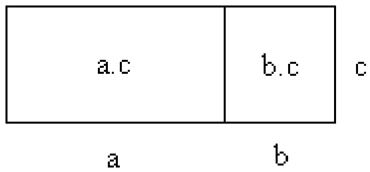
a.b

Výrazem a.b rozumíme obsah obdélníku, jehož strany mají délky a, b.



(a+b).c

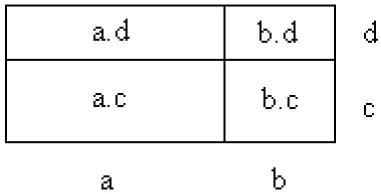
Výrazem (a+b).c rozumíme obsah obdélníku, jehož strany mají délky a+b, c. Větší obdélník je složen ze dvou menších s obsahy a.c, b.c. Obsah velkého obdélníku je roven součtu obsahů menších odélníků: (a+b).c = a.c + b.c.



(a+b)(c+d)

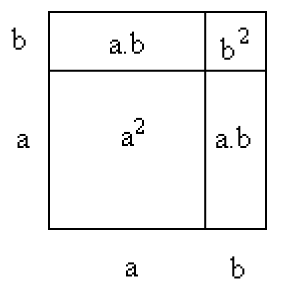
Výraz (a+b)(c+d) můžeme znázornit pomocí obdélníku o stranách a+b, c+d. Obdélník se skládá ze čtyř menších, jejichž obsahy jsou a.d, a.c, b.d, b.c.

Tedy (a+b)(c+d) = a.d + a.c + b.d + b.c.



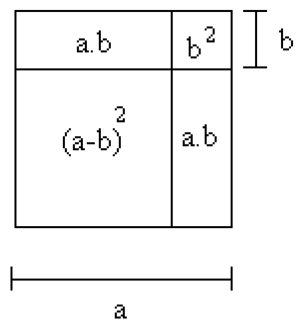
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

Obsah čtverce o straně a+b je roven součtu obsahů čtverce s délkou strany a, čtverce s délkou strany b a dvou obdélníků s délkami stran a, b.



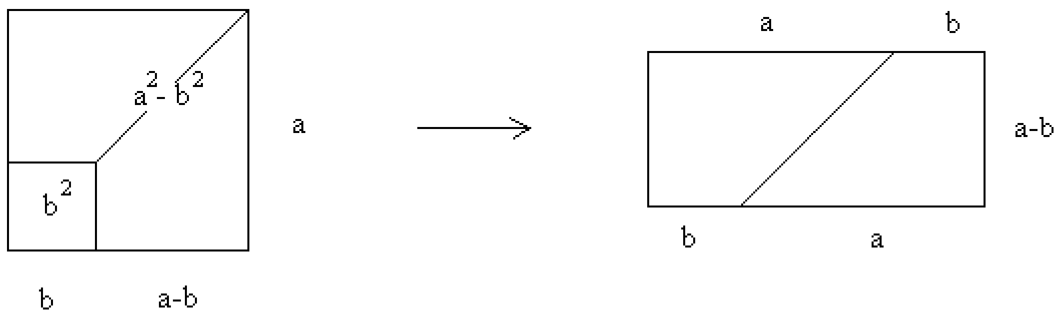
$(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$

Vztah upravíme $a^2 = (a-b)^2+2ab-b^2$. Součtem obsahů čtverce o straně a-b a obdélníků o stranách a, b a odečtením obsahu čtverce o straně b (obsah tohoto čtverce je přičten dvakrát) dostáváme obsah čtverce o straně a.

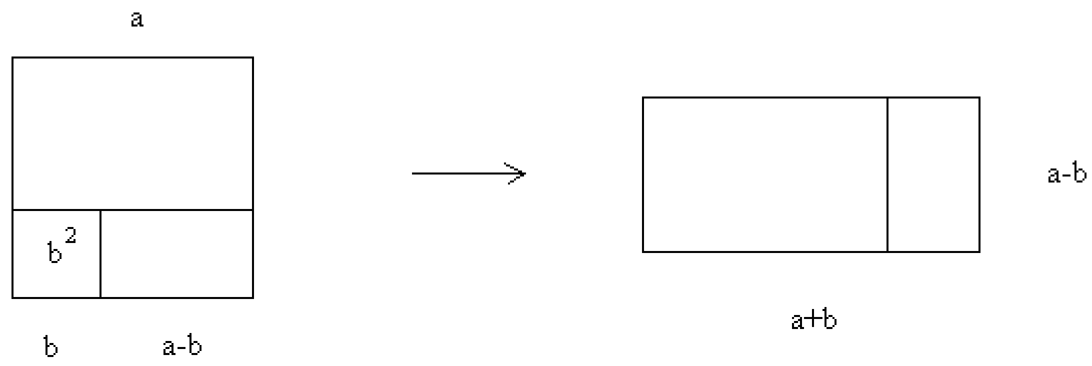


$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

Uvedený vztah znázorníme pomocí čtverce o straně a, který „rozstřihneme“ podél vyznačených čar. Odebereme menší čtverec o straně b a zbývající díly složíme do obdélníku o stranách a+b, a-b. Tento postup lze provést dvěma způsoby:

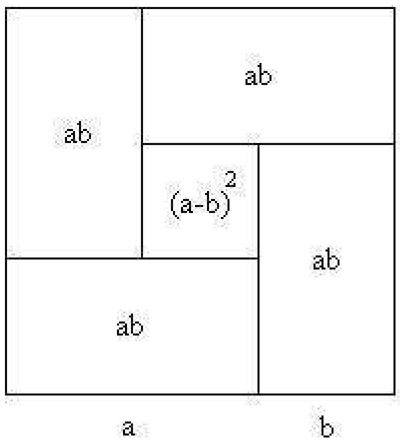


nebo



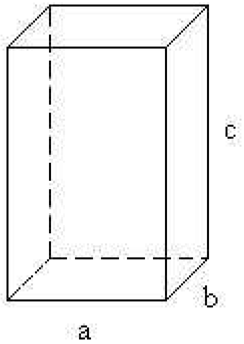
Geometrický přístup lze využít i ke znázornění některých příkladů:

$\mathbf{(a\text{-}b)^2+4ab=(a+b)^2}$



a.b.c

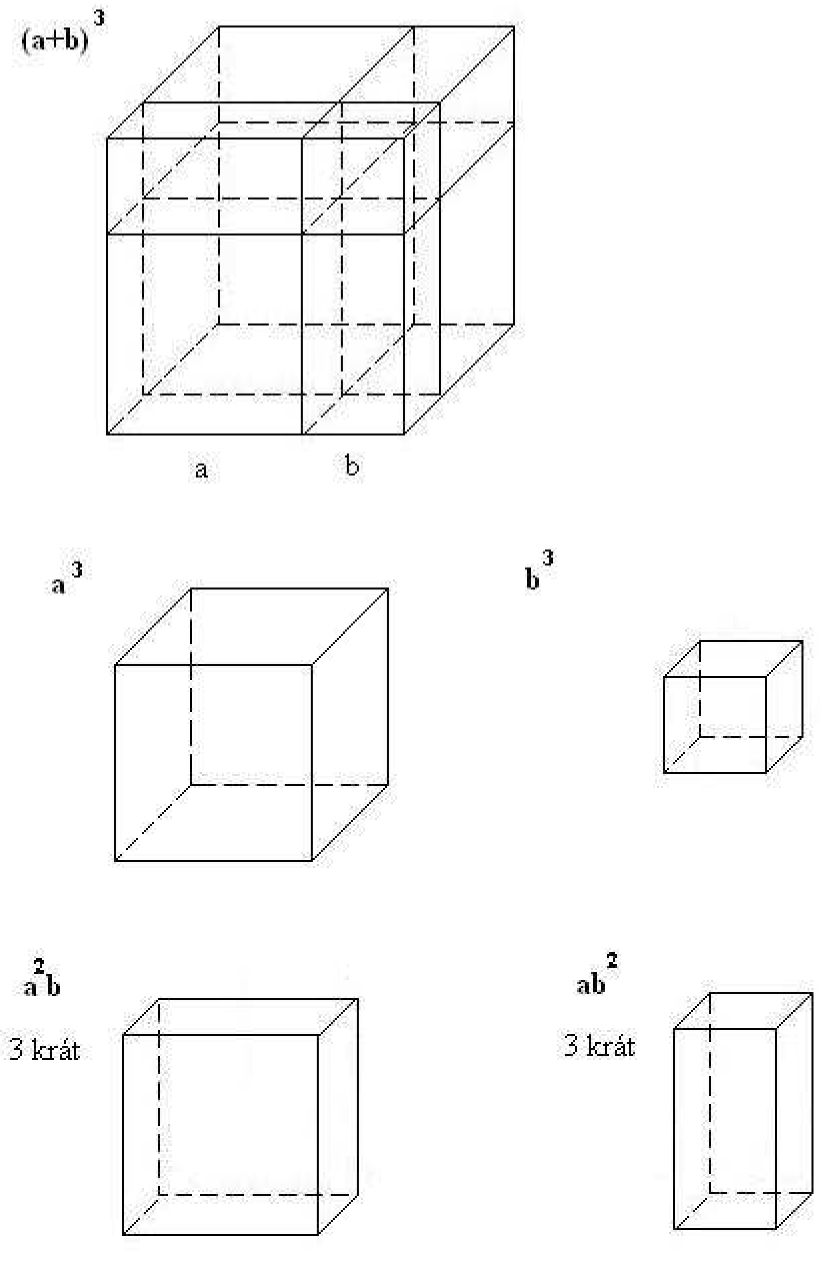
Výraz a.b.c znázorňuje objem kvádru s délkami stran a, b, c.



$(a+b)^3$ (algebraická krychle)

Tento model je vhodný pro studenty s dobrou prostorovou představivostí.

Krychle o straně a+b je složena z jedné krychle o objemu a^3, jedné krychle o objemu b^3, tří kvádrů o objemu ab^2 a tří kvádrů o objemu a^2b.



4.4.2. Standardní manipulace se symboly

Zejména jde o úpravy algebraických výrazů využívajících základní operace s algebraickými výrazy (sčítání, odečítání, násobení, dělení), vztahů pro druhou (resp. třetí) mocninu dvojčlenu, rozdílu čtverců, rozkladu mnohočlenů. Studenti musí spočítat hodně příkladů, aby se jim jazyk písmen stal samozřejmým.

Dobrá znalost standardních úprav algebraických výrazů je nutným předpokladem dalšího studia, neboť většina témat matematiky tuto znalost předpokládá.

Pro pochopení vztahů je možné použít již uvedené modely. Mnohým studentům dělá veliké problémy použití naučených vzorců. Překvapí je jiná písmena, číselné koeficienty a exponenty ve dvojčlenu. K nácviku správného použití vztahů je možné použít příklady, které jsou seřazeny podle rostoucí náročnosti:

1) Doplňte výrazy tak, aby vyjadřovaly druhou mocninu dvojčlenu:

   a)

      i) $(a+b)^2$
      ii) $(a+x)^2$
      iii) $(x+y)^2$
      iv) $(m+n)^2$

   b) *příklady procvičující správné doplnění koeficientů*

      i) $(2a+b)^2$
      ii) $(3a+4b)^2$
      iii) $\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^2$
      iv) $\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}b\right)^2$
      v) $(0{,}4a+0{,}2b)^2$
      vi) $\left(m-\frac{1}{2}\right)^2$
      vii) $\left(\frac{3}{4}x-2z\right)^2$
      viii) $(10s+0{,}1r)^2$

   c) *příklady procvičující správné doplnění exponentů*

      i) $(a^2+b)^2$
      ii) $(a^3+b^2)^2$
      iii) $(a^m+b^2)^2$
      iv) $(x^n+y^m)^2$
      v) $(p^2q^3+pq)^2$
      vi) $(a^3-1)^2$

   d) *příklady procvičující správné doplnění koeficientů i exponentů*

      i) $(6a^2+3b^4)^2$
      ii) $\left(3c^2+\frac{1}{2}d^3\right)^2$
      iii) $\left(\frac{1}{3}a^x+0{,}4b^2\right)^2$
      iv) $\left(-\frac{2}{5}x^3+\frac{3}{4}y^3\right)^2$

   e) *Studenti většinou umí pracovat se vzorcem* $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ *v tomto směru, ale již nezvládají postup v opačném směru. K nápravě může pomoci tento příklad, kde studenti doplňují vynechané symboly:*

      i) $x^2+2xy+\_\_\_=(\_\_\_\_\_\_\_)^2$

ii) $u^2 - 6v ?\_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

iii) $9r^2 - 18r + \_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

iv) $9r^2 - \_\_\_ + 25 = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

v) $\frac{1}{4}a^2 + \_\_\_ + \frac{1}{9}b^2 = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

vi) $\frac{4}{9} + \_\_\_ + n^2 = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

vii) $\_\_\_?\_\_\_?\_\_\_ = (2a - 3b)^2$

viii) $(a-1)(a+1) = \_\_\_\_\_\_\_$

ix) $\_\_\_\_\_\_\_ = 9x^2 - 16y^2$

x) $\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\right) = \_\_\_\_\_\_\_$

f) *v následujícím příkladě studenti musí vymyslet nové členy do požadovaného tvaru*

i) $9r^2 - \_\_\_ + \_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

ii) $z^2 + \_\_\_?\_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

iii) $16a^2 - \_\_\_?\_\_\_ = (\_\_\_\_\_\_\_)^2$

iv) $\_\_\_?\_\_\_?\_\_\_ = (0{,}2x - \_\_\_)^2$

2) Příklady s nabízenou odpovědí

Při tvorbě příkladů s nabízenou odpovědí je nutné znát nejčastější chyby, které zahrneme v nabízené odpovědi. Při řešení testů, v nichž se objevují časté chyby, může student pochopit svůj špatný postup.

a) $2^3 \cdot 2^{2x} =$

i) 2^{6x}	iii) $2^{3x \cdot 2x}$
ii) 4^{6x}	iv) 2^{3+2x}

b) $3ax - 6bx + 5ay - 10by - a + 2b =$

i) $(a-2)(3x+5)$	iii) $(2b-a)(3x+3y+1)$
ii) $(3x-5y+1)(a-2b)$	iv) $(a-2b)(3x+5y-1)$

c) $\left(\dfrac{ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{2b-2a}\right):\dfrac{2b}{a^2-b^2}=$

i) $\dfrac{2a-a^2-b^2}{4(b-a)}$ iii) $\dfrac{a-b}{4}$

ii) $\dfrac{ab-b}{4}$ iv) $\dfrac{a-b}{2}$

d) $-2u-(-5u-(-8u-(5u-3u)))=$

i) $11u$ iii) $-7u$

ii) $13u$ iv) $9u$

e) $\dfrac{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}}{\frac{1}{r^2}-\frac{1}{s^2}}=$

i) $\dfrac{rs}{r+s}$ iii) $-r$

ii) $-\dfrac{r^2+s^2}{s^2}$ iv) $\dfrac{2rs}{r^2-s^2}$

f) $\left(\dfrac{2}{a-1}+1\right)\left(\dfrac{2}{a+1}-1\right)=$

i) $\dfrac{2}{a(a-2)}$ iii) $\dfrac{4}{9}$

ii) -1 iv) $\dfrac{a}{(a+1)(a+2)}$

4.4.3. Strategická manipulace se symboly

Zde již studenti nevystačí s rutinou, musí uvažovat. Je třeba objevit jakým způsobem dojít k cíli. Příkladem jsou následující úlohy:

- Důkazové úlohy

Dokažte, že pro každá reálná čísla a,b platí:

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

Dokažte, že platí:

$$(ab+cd)^2+(ac-bd)^2=(a^2+d^2)(b^2+c^2)$$

- Úpravy algebraických výrazů:

Upravte výraz:

$$\frac{2b(a-1)}{(a-2)(b^2-1)}-\frac{a+b}{ab+a-2b-2}-\frac{a-b}{ab-a-2b+2}$$

4.5. SOFISMATA

Uvádím zde několik zdánlivě správných důkazů, na kterých mohou studenti pochopit, co se může stát pokud dělí výrazem, který je roven nule.

1) Nechť $a \neq 0$, definujeme $b = -a$.

$$a = -b \qquad / \cdot b$$

$$ab = -b^2 \qquad / + a^2$$

$$a^2 + ab = a^2 - b^2$$

$$a(a+b) = (a-b)(a+b)$$

$$a = a - b$$

$$a = a - (-a)$$

$$a = 2a$$

$$1 = 2$$

2)

$$a \cdot a = a^2 \qquad / - a \cdot a$$

$$a \cdot a - a \cdot a = a^2 - a \cdot a$$

$$a(a-a) = (a+a)(a-a)$$

$$a = 2a$$

$$1 = 2$$

3)

$$a = \frac{3}{2}b \qquad / \cdot 4$$

$$4a = 6b$$

$$14a - 10a = 21b - 15b$$

$$15b - 10a = 21b - 14a$$

$$5(3b - 2a) = 7(3b - 2a)$$

$$5 = 7$$

4.6. ALGEBRAICKÉ VÝRAZY V JINÝCH OBLASTECH MATEMATIKY

Znalost algebraických výrazů je třeba i v ostatních oblastech matematiky, např.: funkce, posloupnosti, kombinatorika, goniometrie, komplexní čísla, atd. V této kapitole je uvedeno několik typických příkladů, které bez znalosti rozebíraného učiva z algebry nelze řešit. Modelování se využívá v příkladu z posloupností, standardních manipulací ve všech ostatních příkladech, obou je využito ve slovních úlohách z planimetrie a stereometrie.

- POSLOUPNOSTI

Vyjádřete dané posloupnosti pomocí vzorce pro n-tý člen:

a) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$

b) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, 9, ...

řešení: [a) $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$, b) $\left(n \cdot (-1)^{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$]

- PLANIMETRIE

Vypočítejte obsah rovnoramenného lichoběžníku, jehož základny mají délky 22 cm a 12 cm, je-li výška o 1 cm menší než délka jeho ramene.

řešení: [204 cm^2]

- STEREOMETRIE

Kvádr má objem 810 cm^3, jeho rozměry jsou v poměru 2:3:5. Vypočtěte jeho povrch.

řešení: [558 cm^2]

- KOMBINATORIKA

Vypočtěte:

a) $\frac{(n+2)!}{n!} - 2\frac{(n+1)!}{(n-1)!} + \frac{n!}{(n-2)!}$

b) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!} - \frac{1}{(n-2)!}$

řešení: [a) 2; b) $\frac{1-n^2}{n!}$]

- FUNKCE

Nakreslete grafy funkcí:

a) $y=\left(1-\dfrac{x^2}{x^2-1}\right):\left(\dfrac{x+2}{x+1}-1\right)$

b) $y=1-\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$

c) $y=\dfrac{1-x^2}{x^3-1}\cdot\left(\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

řešení: [a) $y=\dfrac{1}{1-x}$, $D_f=\mathbf{R}-\{\pm1\}$; b) $y=\dfrac{1}{1+x}$, $D_f=\mathbf{R}-\{-1;0\}$;

c) $y=-\dfrac{1}{x}$, $D_f=\mathbf{R}-\{-1;0;1\}$]

- GONIOMETRIE

Určete definiční obor daného výrazu a potom ho zjednodušte:

a) $(1+\cos x)(1-\cos x)$

b) $(\cos x-\sin x)^2+(\cos x+\sin x)^2$

c) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{\sin x}$

d) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$

řešení: [a) $\sin^2 x$; $x\in\mathbf{R}$; b) 2; $x\in\mathbf{R}$; c) $\dfrac{2}{\sin x}$; $x\in\mathbf{R}-\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{k\pi\}$; d) $1-\cos x$;

$x\in\mathbf{R}-\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\{\pi+2k\pi\}$]

- LOGARITMICKÉ ROVNICE

Řešte rovnici s neznámou $x\in\mathbf{R}$:

$\log(x+1)+\log(x-1)-\log x=\log(x+2)$

řešení: [$x\in\{\ \}$]

- KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Určete reálnou část, imaginární část, absolutní hodnotu komplexního čísla z a číslo komplexně sdružené k z:

a) $z=(3+i)\cdot(-1+2i)-\dfrac{5i-15}{1+2i}-\dfrac{1-3i}{i}$

b) $z=\dfrac{1-3i}{2+i}-\dfrac{1+3i}{i-2}$

c) $z = \frac{\left(3 - i\sqrt{2}\right)^2 - \left(3 + i\sqrt{2}\right)^2}{6}$

řešení: [a) $z_1 = -1$, $z_2 = -1$, $|z| = \sqrt{2}$, $\bar{z} = -1 + i$; b) $z_1 = -\frac{2}{5}$, $z_2 = 0$, $|z| = \frac{2}{5}$, $\bar{z} = -\frac{2}{5}$; c) $z_1 = 0$, $z_2 = -2\sqrt{2}$, $|z| = 2\sqrt{2}$, $\bar{z} = 2i\sqrt{2}$]

Dělení komplexních čísel:

$\frac{1-i}{1+i}$ řešení: [$-i$]

- LIMITA FUNKCE

Vypočtěte:

$\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}$ řešení: [$\frac{3}{2}$]

4.7. SLOVNÍ ÚLOHY Z HLEDISKA SPECIFICKÝCH PORUCH UČENÍ

S řešením slovním úloh mají studenti problémy, zvláště pokud mají některou ze specifických poruch učení. Obecně může chybný výsledek řešení slovní úlohy mít kořen (13):

- v chybném přečtení úlohy
- v nesprávném pochopení (nebo i nepochopení) vztahu, který je formulován v jazykové rovině
- v chybné volbě algoritmu řešení
- v chybném grafickém vyjádření
- v chybném numerickém výpočtu
- v nesprávné jazykové (verbální) formulaci dobrého výsledku

Pro studenty s poruchami učení může být řešení slovních úloh problematické z několika důvodů (3):

1. Pokud má student problémy s dyslexií, neumí si přečíst s porozuměním text slovní úlohy a nepostihne ani význam, ani matematickou stránku úlohy
2. Pokud má student problémy s dysgrafií, není schopen zapsat zadání slovní úlohy, ani příklad pro výpočet
3. Pokud se u studenta vyskytuje ideognostická dyskalkulie (podle Košče), není schopen postihnout vztahy mezi veličinami zadanými ve slovní úloze a mezi veličinami hledanými

Pomoc by měla být zaměřena na oblast, ve které student chybuje. Při řešení slovních úloh je třeba dodržovat určitý postup, který studentům pomůže v orientaci ve slovních úlohách:

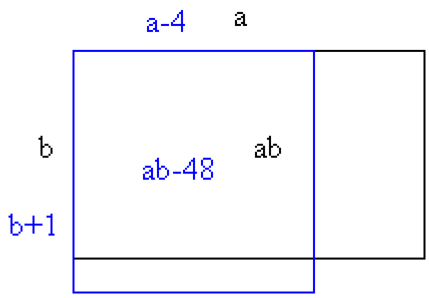
1. Přečtení úlohy
2. Rozbor slovní úlohy: Co mám vypočítat, co je zadáno? Které údaje potřebujeme k odpovědi na otázku?
3. Grafické znázornění
4. Matematický záznam úlohy
5. Výpočet
6. Odpověď
7. Provedení zkoušky správnosti

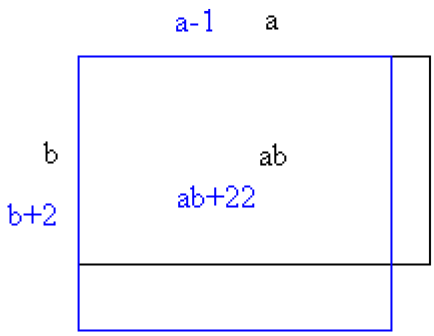
Příklad:

Zvětší-li se délka strany b obdélníku o 1 cm a délka druhé strany a se současně zmenší o 4 cm, zmenší se obsah obdélníku o 48 cm^2. Zvětší-li se délka strany b o 2 cm a zmenší-li se současně délka strany a o 1 cm, zvětší se obsah obdélníku o 22 cm^2. Určete délky a, b stran obdélníku.

Co máme vypočítat? Délky a, b stran obdélníku.

Grafické znázornění:





Matematický záznam úlohy:

Původní délky stran: a, b původní obsah: ab

Zvětší-li se délka strany b obdélníku o 1 cm $b+1$

a délka druhé strany a se zmenší o 4 cm, $a-4$

zmenší se obsah obdélníku o 48 cm^2. $ab-48$

První rovnice: $(b+1)(a-4)=ab-48$

Zvětší-li se délka strany b o 2 cm $b+2$

a zmenší-li se současně délka strany a o 1 cm, $a-1$

zvětší se obsah obdélníku o 22 cm^2. $ab+22$

Druhá rovnice: $(b+2)(a-1)=ab+22$

Výpočet: Platí soustava rovnic

$$(b+1)(a-4)=ab-48$$
$$(b+2)(a-1)=ab+22$$

odtud po úpravě

$$a-4b=-44$$
$$2a-b=24.$$

První rovnici vynásobíme –2

$$-2a+8b=-88$$
$$2a-b=24;$$

sečtením rovnic dostaneme $7b=112$, odkud $b=16$.

Dosadíme $b=16$ do rovnice $2a-b=24$ a získáme $a=20$.

Odpověď: Obdélník má rozměry 16 cm a 20 cm.

Zkouška správnosti:

Ověříme zda vypočítané hodnoty vyhovují podmínkám úlohy:

Zvětší-li se délka strany b obdélníku o 1 cm 17 cm

a délka druhé strany a se současně zmenší o 4 cm, 16 cm

zmenší se obsah obdélníku o 48 cm^2. 272 cm^2 ($16\cdot 20-48=272$)

Obsah nového obdélníku je 272 cm^2 ($17\cdot 16=272$).

Zvětší-li se délka strany b o 2 cm 18 cm

a zmenší-li se současně délka strany a o 1 cm, 19 cm

zvětší se obsah obdélníku o 22 cm^2. 342 cm^2 ($16\cdot 20+22=342$)

Obsah nového obdélníku je 342 cm^2 ($18\cdot 19=342$).

Vypočtené hodnoty odpovídají zadání.

5. ZÁVĚR

Cílem diplomové práce bylo zjistit, zda mají dyskalkulici na středních školách stále problémy v matematice, jejich problémy se zabývat a navrhnout učební postupy. Největší problém byl dyskalkuliky objevit, mnozí se za svůj handicap stydí a neradi něm mluví. Nicméně se ukázalo, že dyskalkulici studují na středních školách a dokonce na vysokých školách i obory blízké matematice. Dále někteří dyskalkulici na střední škole přestali mít obtíže, jiní je měli stále i později po dostudování střední školy. Problém dyskalkulie na středních školách existuje, ale téměř nikdo jej neřeší. Středoškolští učitelé matematiky, kteří učí dyskalkuliky a mají o tuto problematiku zájem, se setkávají s nedostatkem informací.

V matematické části diplomové práce jsem uvedla způsoby práce se studenty, každého může oslovit jiný postup. Někoho osloví algebraický postup, jiného aritmetický a dalšímu pomůže geometrický postup. Každý student se může matematice naučit, jestliže je pro něj nalezen adekvátní přístup.

Nejdůležitější význam práce tkví v upozornění na problém, který existuje a je třeba jej řešit. Diplomovou práci mohou využít učitelé matematiky na středních školách. Já osobně svou diplomovou práci využiji ve svém povolání nejen při práci s dykalkuliky, ale i při výuce všech studentů středních škol.

LITERATURA:

1) BLAŽKOVÁ, R.: *Algebra*, metodický materiál, Brno: CDVU, 2003
2) BLAŽKOVÁ, R.: *Algebraické výrazy*, metodický materiál, Brno: CDVU 1998
3) BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M., BLAŽEK, M.: *Poruchy učení v matematice a možnosti jejich nápravy*, Brno: Paido, 2000
4) BLAŽKOVÁ, R., MATOUŠKOVÁ, K., VAŇUROVÁ, M.,: *Texty k didaktice matematuky pro studium učitelství 1. stupně základní školy, 1. část*, Brno: Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, fakulta pedagogická, 1987
5) BUŠEK, I.: *Řešené maturitní úlohy z matematiky*, Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 1988
6) FUCHS E., KUBÁT J.a kol.: *Standardy a testové úlohy z matematiky pro čtyřletá gymnázia*, Praha : Prometheus, 2001
7) GAMOV, G.:*Moje světočára*, Praha: Mladá fronta, 2000
8) HEJNÝ, M. a kol.: *Teória vyučovania matematiky 2*, Bratislava: Slovenské pedagogické nakladateľstvo, 1990
9) KUCHARSKÁ, A.: *Specifické poruchy učení a chování : sborník 1998-1999*, Praha: Portál, 1999
10) KYNKOROVÁ, Jitka. *Dyskalkulie a její reedukace* [online].
[cit. 2. června 2003].
Dostupný z WWW: <*http://www.volny.cz/dyskalkulie*>
11) MATĚJČEK Z.: *Dyslexie*, Jinočany: H&H, 1995
12) MICHALOVÁ, Z.: *Specifické poruchy učení na druhém stupni ZŠ a na školách středních*, Havlíčkův Brod: Tobiáš, 2001
13) NOVÁK, J.: *Dyskalkulie*, Litomyšl: Augusta, 1997
14) NOVÁK, J.: *Vyšetření matematických schopností u dětí*, Monografie, Brno: Psychodiagnostika, 1997
15) NOVÁK, J.: *Vyšetření matematických schopností u dětí*, Příručka, Brno: Psychodiagnostika, 1997
16) NOVÁK, J., KUMOROVITZOVÁ, M.: *Nauč mě počítat, metodika korekce vývojových dyskalkulií*, Litomyšl: Augusta, 1994
17) PETÁKOVÁ, J.: *Matematika - příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*, Praha: Prometheus, 1998
18) PIPEKOVÁ, J. a kol.: *Kapitoly ze speciální pedagogiky*, Brno: Paido, 1998

19) POKORNÁ, V.: *Teorie, diagnostika a náprava specifických poruch učení*, Praha: Portál, 1997
20) SELIKOWITZ, M.: *Dyslexie a jiné poruchy učení*, Praha: Grada, 2000
21) VÍTKOVÁ, M. (ed.):*Základy speciální pedagogiky II. pro studenty přírodovědecké fakulty a fakulty informatiky*, učební text v elektronické podobě, Brno, 2002
22) ZELINKOVÁ, O.: *Poruchy učení*, Praha: Portál, 1998
23) *Rámcový vzdělávací program pro gymnázia,* Praha: VÚP, 2002
24) Výzkumný ústav pedagogický v Praze. *Rámcový vzdělávací program* [online]. [cit. 12. dubna 2004].
Dostupný z WWW: <*http://www.mailto:rvpzv3@vuppraha.cz*>

ČASOPISY

Matematika, fyzika, informatika, Praha: Prometheus

Moderní vyučování, Kladno: Aisis

Speciální pedagogika, Praha: Univerzita Karlova

Učitelské listy, Praha: Strom

Učitel matematiky, Brno: JČMF

Učitelské noviny, Praha: Gnosis